

# すべり面を有限要素で近似した3次元斜面安定解析

安定解析 斜面安定 すべり面

アドバンテクノロジー  
法政大学  
法政大学

正会員 濱崎 英作  
正会員 竹内 則雄  
正会員 草深 守人

## 1. はじめに

Hovland 法等の分割法による斜面安定解析では、解析対象の三次元斜面を四角柱（カラム柱）に分割し、すべり面上の垂直力とせん断力を求めて、2次元問題の簡便法等と同様な方法により斜面全体の安全率を求める（図1参照）。このとき、カラム柱内のすべり面は矩形となるため、矩形領域をさらに三角形に分割して面を定義する方法や、矩形の中点を結ぶベクトルからすべり面を定義する方法が提案されている。本報告では、この面を有限要素法で用いられるアイソパラメトリック要素で定義する方法を提案する。さらに具体的な三次元斜面安定解析を行い、得られる解の特徴について検討する。

## 2. 分割法における安全率と力の関係

Hovland 法による斜面安定解析では、図1に示すように、様々なすべり方向を仮定し、それぞれに対して式(1)で示す安全率を求め、それらの最小の値をもって斜面の安全率と考えている。

$$F_s = \frac{\tan \phi (N - U) + C \cdot A}{T} \quad (1)$$

ここで、 $U$  は間隙水圧、 $A$  はすべり面の面積、 $C, \phi$  は、それぞれ粘着力と内部摩擦角である。図2はすべり面上の力の関係を示したもので、すべり面が  $z = z(x, y)$  と表すことができるなら、法線ベクトル  $n$  は

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left( -\frac{\partial z}{\partial x} i - \frac{\partial z}{\partial y} j + k \right) \quad (2)$$

となる。ここで、 $\partial z / \partial x$  と  $\partial z / \partial y$  は面の  $x$  および  $y$  方向の勾配を表しており、 $i, j, k$  は  $x, y, z$  軸に関する基底ベクトルである。このとき、すべり面上に働く垂直力  $N$  はカラム柱の重さ ( $W = Wk$ ) と法線ベクトルとの内積によって以下のように求めることができる。

$$N = W \cdot n = \frac{W}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad (3)$$

一方、仮定したすべり方向  $s$  は、図のように  $\theta$  を考えると、 $s = \cos \theta \cdot i + \sin \theta \cdot j$  と表すことができる。したがって、すべり方向のせん断力  $T$  は、法線ベクトルとの内積とカラム柱の重さ  $W$  により次のように計算することができる。

$$T = W (n \cdot s) \quad (4)$$

なお、本報告では、式(1)で安全率を求める際、垂直直力はすべり方向にかかわらず、式(3)によって求め、せん断力はすべり方向に応じて式(4)から計算する。

## 3. 従来のすべり面の定義

前節で述べたように、すべり面の式  $z = z(x, y)$  が求められれば、幾何学的な関係からすべり面に働く力を求めることができる。しかし、矩形領域の場合、4点の座標から面の式を求められないため、図3(a)に示すように、矩形領域の各辺の中点を結ぶベクトルから面の傾きを定義する方法や、(b)のように矩形領域を三角形領域に再分割して面を定義する方法が用いられている。三角形に再分割する場合、地形によっては図のように分割方向が右斜めか左斜めかによって、分割辺の尾根が全く異なった状態となり面の傾きが逆になることもある。このため、両方の分割を行い、それぞれの傾きから平均値を求めて矩形領域の面の傾きとする方法も提案されている。

## 4. 双一次アイソパラメトリック四辺形要素によるすべり面の定義

本報告では、すべり面を双一次アイソパラメトリック四辺形要素を用いて定義する。図4はこの要素の座標変換の関係を示したもので、自然座標系と物理座標系の間に次の関係が成立している。

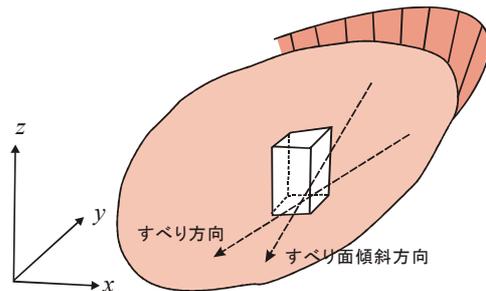


図1 分割法による斜面安定解析のカラム柱

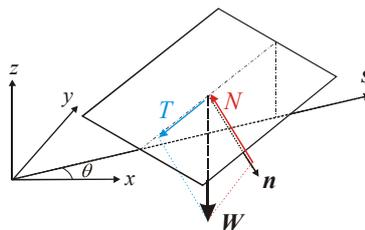
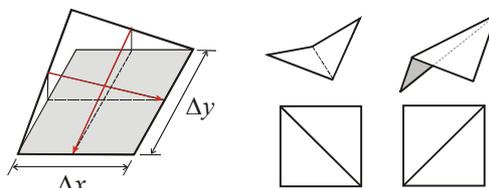


図2 すべり面に働く力の関係



(a) 中点を結ぶ方法 (b) 三角形に分割する方法

図3 従来のすべり面の近似法

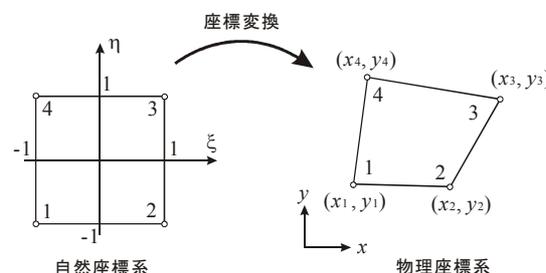


図4 双一次アイソパラメトリック四辺形要素

$$x(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta)x_{\alpha} \quad , \quad y(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta)y_{\alpha} \quad (5)$$

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad , \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad , \quad N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad , \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

ここで、 $N_{\alpha}$ は形状関数で、2次元の場合図5に示すように該当節点で1、その他の点で0となる関数である。アイソパラメトリック要素では座標変換と同じ形状関数を用いて物理量を補間する。ここでは、物理量として $z$ 座標を考え、

$$z(x, y) = z(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta)z_{\alpha} \quad (6)$$

のようにすると面の式が定義できる。このとき面傾きは

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

と計算することができる。ここで、 $\mathbf{J}$ はヤコビアン行列である。具体的な計算は省略するが、この式(5)~(7)を式(2)~(4)に代入すれば矩形領域の面の傾き等を求めることができる。

この関係を用いて矩形のすべり面上の垂直力とせん断力を求める際にすべり面における積分が生ずるが、本報告では数値積分を用い積分点毎に勾配を求める。ただし、カラム柱の重量 $\mathbf{W}$ については、矩形領域中央の値を代表値として使用した。なお、積分点を中央の1点にすると3節で述べた従来法の中点を結ぶ方法と同一の式となる。

### 5. 三次元斜面安定解析例

双一次アイソパラメトリック四辺形要素を用いて具体的な三次元斜面安定解析を行う。図6は解析対象地区で、矢印のように2~17度について1度ずつ角度を変えて安全率を計算した。解析に用いた材料定数は、湿潤単位体積重量1.8tf/m<sup>3</sup>、粘着力4.5tf/m<sup>2</sup>、内部摩擦角20.237度である。図7はすべり面における鳥瞰図で、すべり面は比較的フラットな形状をしている。

図8は、各カラム柱の局所的な安全率のコンターをプロットしたもので、三次元解析を行うとこのような面的な広がりから安定対策を行えるという利点がある。図9は積分点数を変えた場合の安全率の関係を示した図である。積分点数を増やす毎に安全率は大きくなる。一方、図10は、分割法の相異による安全率の変化を調べた図である。四角形要素が一番小さい安全率となった。しかし、本例は比較的平らなすべり面であったため大きな差異は生じなかった。

### 6. まとめ

すべり面を定義するため従来の方法を包括した有限要素による考え方を提案した。三角形分割の凹凸の矛盾を取り除き、簡単にすべり面を定義することができた。

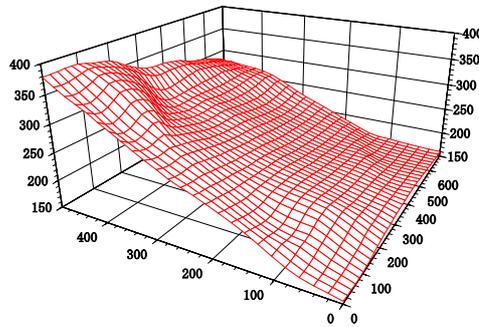


図7 すべり面の鳥瞰図

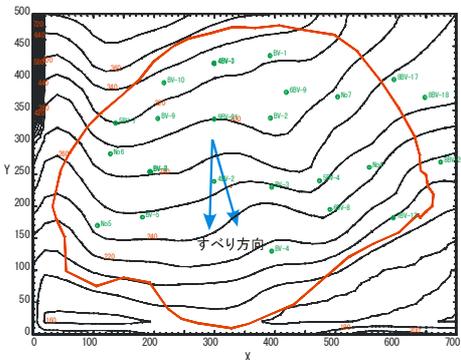


図6 解析対象地区とすべり方向

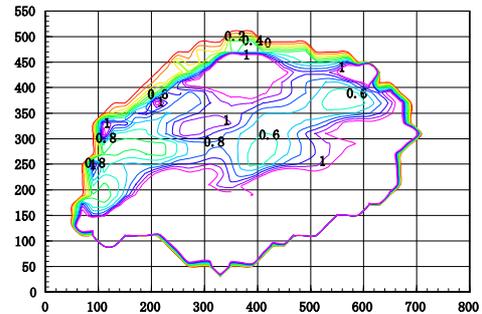


図8 局所安全率の分布

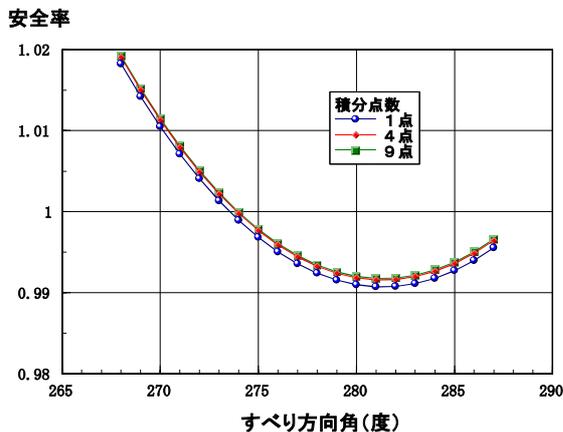


図9 積分点数毎の安全率

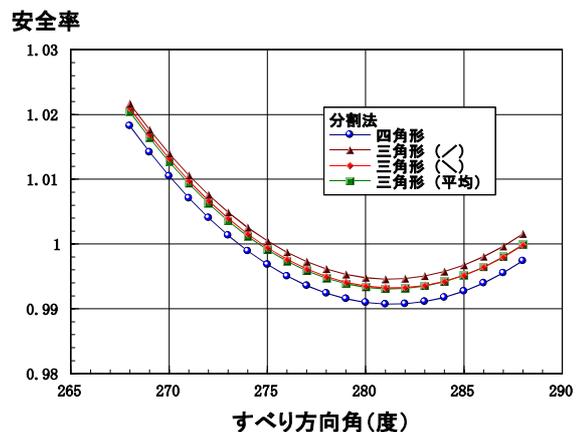


図10 分割法の相異による安全率